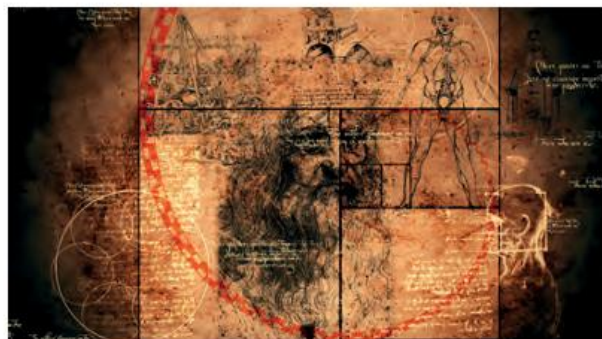


SZÉPSÉG ÉS MŰVÉSZET KAPCSOLATA A MATEMATIKÁVAL

ELMÉLET

Az AB szakasznak a 2. kidolgozott feladatban bemutatott felosztási módja igen „nagy karriert futott be” a művészetben, az építészetben, ráadásul még a „valóságos világ” is kedveli az egésznek ezt a fajta felosztását. Egyesek annyira különlegesnek és szépnek, sőt esztétikailag tökéletesnek találták ezt a felosztási módot, hogy külön nevet is adtak neki: **aranymetszésnek** (*sectio aureának*) nevezték el.



Az aranymetszés

Az AB szakaszt a P pont az aranymetszés szerint osztja két részre, ha

$a : b = b : (a + b)$ (azaz a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint a nagyobbik rész az egészhez).

A 2. kidolgozott feladat gondolatmenetét követve egy másodfokú egyenlet megoldása megadja az aranymetszés arányát:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{kisebbik rész}}{\text{nagyobbik rész}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618, \text{ illetve reciprokat véve: } \frac{b}{a} = \frac{\text{nagyobbik rész}}{\text{kisebbik rész}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618.$$

BEVEZETŐ

Ha a matematika és a művészet kapcsolatát vizsgáljuk, a szimmetria és az arány bizonyára az elsőként felbukkanó matematikai fogalmak között lesznek. A szimmetriáról már szoltunk. Az arányokkal összefüggésben a számtani közép(arányos) és a mértani közép(arányos) sokszor kerül elő festmények, szobrok, épületek bizonyos méreteinek elemzésekor.

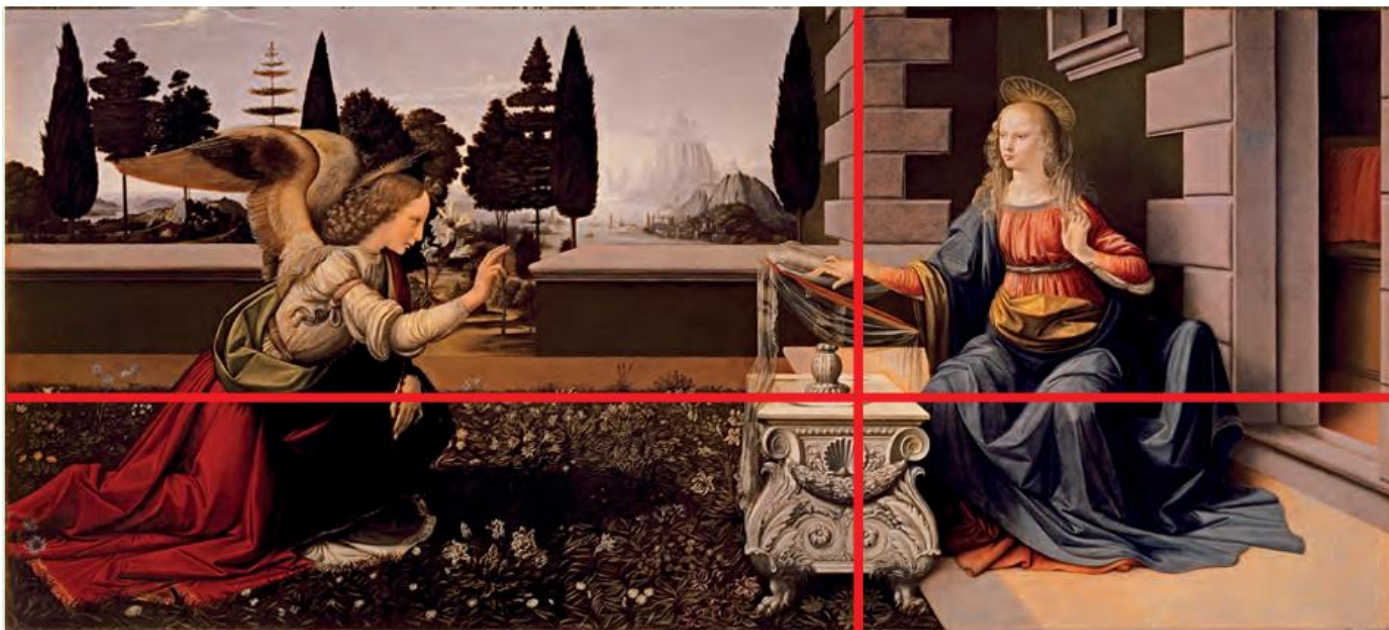
A Wikipédia szerint: „A művészetben az arány az egyes részek méretének viszonya az egészhez [...] Az arány minden alka lommal jelentkezik, valahányszor valaminek, ami önmagában teljes egész, különböző formájú részei vannak. Erre jó példa az emberi test, vagy pedig ha több tárgy együttvéve összeillő egészet képez, mint például az épületen az oszlopok, pillérek, ívek, gerendák és a szerkezetnek a többi része.”

A legegyszerűbb, de a legtöbbet idézett esetben egy szakasz (az egész) két darabra (részre) való felosztásakor keletkező arányok képezik a vizsgálat tárgyát. A két egyenlő részre osztás (azaz 1 : 1 arányú felosztás) „hétköznapi” esetnek számít, inkább a szimmetriához tartozónak érezzük. Vannak ennél sokkal „izgalmasabb” felosztások is.

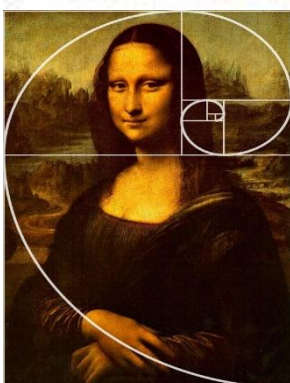
Jan Vermeer van Delft holland barokk festő Tejet öntő nő című olajfestménye. Jelenleg az amszterdami Rijksmuseumban van kiállítva, és egyesek szerint a múzeum egyik legszebb kiállítási tárgya.

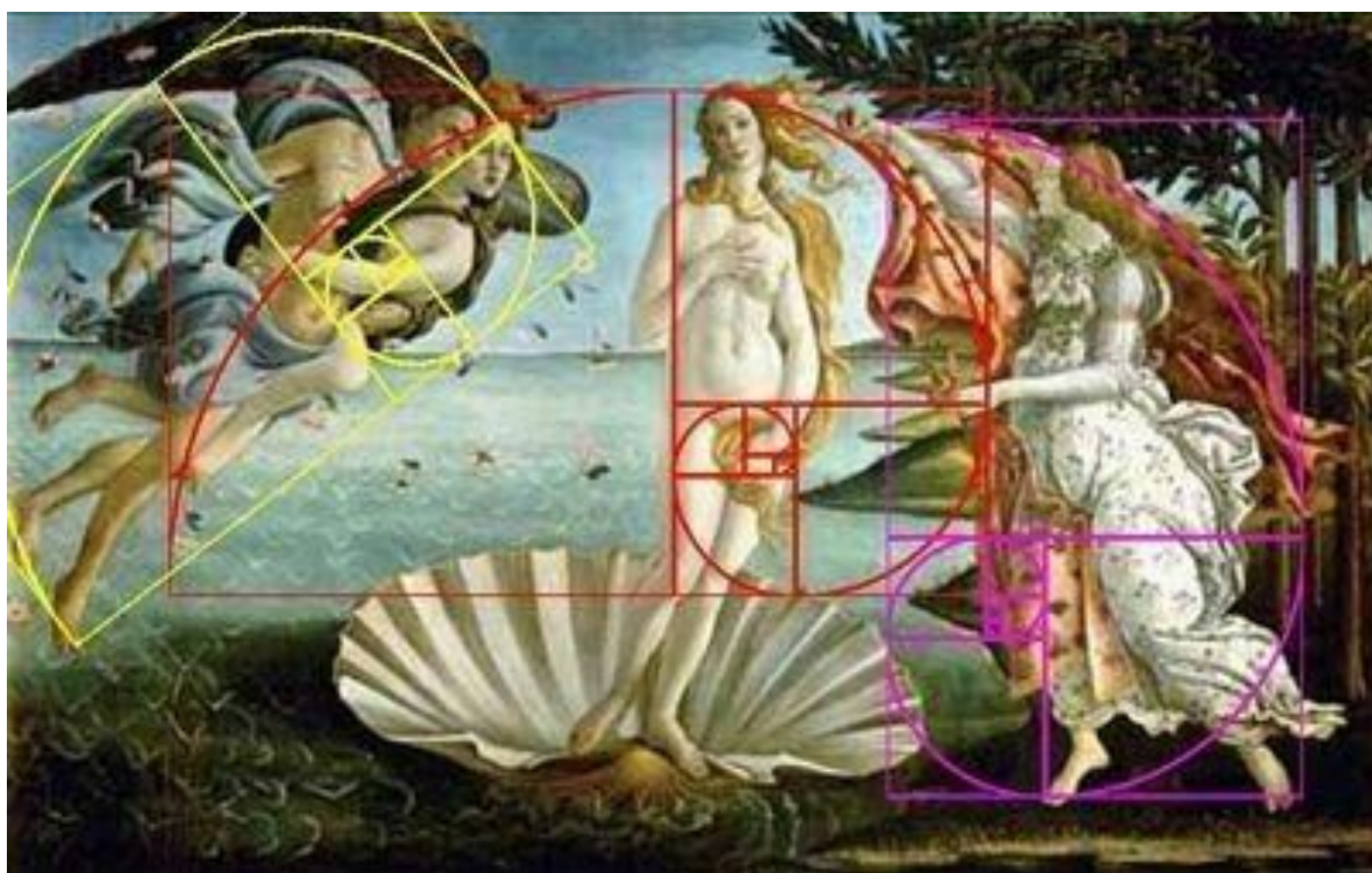


Leonardo da Vinci egyik híres festménye, az Angyali üdvözlés vonásaiban is megtalálható az aranymetszés.



És másalkotásoknál:





FELADATOK

- 1.** Osszuk fel a 6 cm hosszú szakaszt két részre úgy, hogy a kisebbik rész és az egész szakasz hosszának számtani közepe a nagyobbik rész legyen!

Megoldás

Ha a kisebbik rész hossza x cm, akkor a nagyobbik rész hossza $(6 - x)$ cm. Az kell, hogy $\frac{6+x}{2} = 6 - x$ teljesüljön.

Most $6 + x = 12 - 2x$, $3x = 6$, $x = 2$.

Tehát a 6 cm-es szakaszt egy 2 cm-es és egy 4 cm-es részre osztva kapjuk a kívánt felosztást.



Megjegyzés

- Ezt a felosztást tekintve elmondhatjuk, hogy amennyivel hosszabb a nagyobbik rész a kisebbiknél, annyival hosszabb az egész szakasz a nagyobbik résznél.
 - Bármely szakaszt osztunk két részre a feladatban megadott feltétellel, mindig azt kapjuk, hogy a nagyobb rész az egésznek kétharmad része, a kisebbik rész az egésznek egyharmad része.
-

- 2.** Osszuk fel a 6 cm hosszú szakaszt két részre úgy, hogy a kisebbik rész és az egész szakasz mértani közepe a nagyobbik rész legyen!

Megoldás

Ha a kisebbik rész hossza x cm, akkor a nagyobbik rész hossza $(6 - x)$ cm. Az kell tehát, hogy $6 - x = \sqrt{6 \cdot x}$ legyen.

Itt nyilván $0 < x < 6$, ezért a négyzetre emelés ekvivalens egyenlethez vezet: $x^2 - 12x + 36 = 6x$, vagyis

$x^2 - 18x + 36 = 0$. Ennek az egyenletnek két valós gyöke van: $9 + 3\sqrt{5} \approx 15,7$, illetve $9 - 3\sqrt{5} \approx 2,3$.

A feladatnak csak ez utóbbi lehet megoldása, tehát a 6 cm-es szakaszt egy $\sim 2,3$ cm-es és egy $\sim 3,7$ cm-es részre osztva kapjuk a kívánt felosztást.



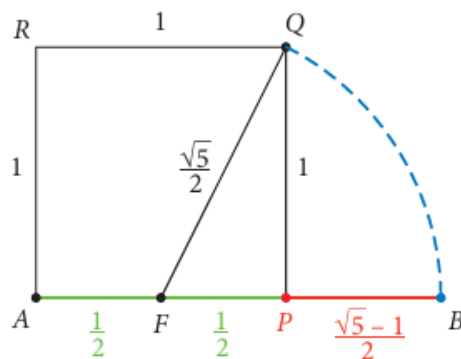
Megjegyzés

- Ezt a felosztást tekintve elmondhatjuk, hogy ahányszorosa a nagyobbik rész a kisebbik résznek, annyszorosa az egész (szakasz) a nagyobbik résznek. Más-ként: a kisebb rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, ahogyan a nagyobbik rész az egészhez.
- Bármely szakaszt osztunk két részre a feladatban megadott feltétellel, mindig azt kapjuk, hogy a nagyobb rész az egésznek körülbelül 0,618-szerese, a kisebbik rész a nagyobbik résznek ugyancsak 0,618-szerese. A kisebbik rész az egésznek körülbelül 0,382-szerese.

- 3.** Az 1 egység oldalhosszúságú négyzetből kiindulva szerkesszünk olyan AB szakaszt, amelynek az arany-metszésénél adódó nagyobbik része éppen 1 hosszúságú (és így a kisebbik része $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hosszúságú)!

Megoldás

A szerkesztés me-
nete az ábráról leol-
vasható:



- A négyzet AP oldalának F felezőpontját összekötjük a négyzet Q (vagy R) csúcsával.
 - Az FQ szakasz hossza Pitagorasz-tétellel számítható:
 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 - F középpontú, FQ sugarú kört rajzolunk, és megjelöljük az AB egyenesével alkotott egyik metszéspontját (B).
 - $PB = FQ - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, az AP szakasz hossza 1, tehát az AB szakaszt a P pont az aranymetszés szerint vágja két részre.
-